

IV. Rovnice a nerovnice

§1. Lineární rovnice a nerovnice

Def.: Rovnicí s neznámou $x \in \mathbf{R}$ rozumíme každou výrokovou formu tvaru: $L(x) = P(x)$, kde $L(x)$, $P(x)$ jsou výrazy s proměnnou $x \in \mathbf{R}$.

Kořenem nebo-li řešením rovnice nazýváme taková $c \in \mathbf{R}$, pro která platí $L(c) = P(c)$.

Řešit rovnici znamená stanovit množinu P jejích kořenů (zpravidla výčtem prvků, případně rozhodnout, že P je prázdná).

Oborem pravdivosti rovnice nazýváme množinu P .

Def.: Lineární rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$ nazýváme každou rovnici, kterou lze úpravami převést do tvaru $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbf{R}$.

Pozn.: Při úpravě lineární rovnice na konečný tvar užíváme zpravidla úprav založených na platnosti těchto vět $\mathbf{R}$:

$\forall a, b, c \in \mathbf{R}$: a) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

b) $a = b \wedge c \neq 0 \Rightarrow ac = bc$

Lze tedy (aniž se změní obor pravdivosti P) provádět tyto úpravy:

a) přičítat k oběma stranám rovnice stejné číslo (stejný výraz);

b) násobit obě strany rovnice týmž nenulovým číslem (rovnice nenásobíme výrazem s proměnnou (může se změnit obor pravdivosti) a NIKDY nedělíme proměnnou.

V.1.1.: Necht' $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbf{R}$; $x \in \mathbf{R}$. Pak platí:

$$1) a \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow P = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

$$2) a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x = 0 \Rightarrow P = \mathbf{R}$$

$$3) a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow 0x \neq 0 \Rightarrow P = \emptyset$$

Def.: Nerovnicí s neznámou $x \in \mathbf{R}$ rozumíme každou výrokovou formu tvaru $L(x) < P(x)$, $L(x) \leq P(x)$, $L(x) > P(x)$, $L(x) \geq P(x)$, kde $L(x)$ a $P(x)$ jsou výrazy s proměnnou $x \in \mathbf{R}$.

Řešením nerovnice nazýváme každé $c \in \mathbf{R}$, pro něž po dosazení za neznámou přejde nerovnice v pravdivý výrok.

Všechna řešení zpravidla zapisujeme pomocí intervalů, eventuálně množinových operací s nimi.

Def.: Lineární nerovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$ nazýváme každou nerovnici, kterou lze úpravami převést do některého z tvarů:

$$ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0; a, b \in \mathbf{R}.$$

Pozn.: Při úpravách nerovnice na hledaný tvar využíváme následujících vět v $\mathbf{R}$:

$\forall a, b, c \in \mathbf{R}$: a) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

b) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

c) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

Analogické věty platí pro $>, \leq, \geq$.

V.1.2.: Necht' $ax + b < 0$; $a, b \in \mathbf{R}$ pak platí:

$$1) a > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \Rightarrow P = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$$

$$2) a < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow P = \left(-\frac{b}{a}; \infty\right)$$

$$3) a = 0 \wedge b > 0 \Rightarrow 0x < -b \Rightarrow P = \emptyset$$

$$4) a = 0 \wedge b < 0 \Rightarrow 0x < -b \Rightarrow P = \mathbf{R}$$

$$5) a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x < 0 \Rightarrow P = \emptyset$$

Analogicky se řeší další typy nerovnic.

§2. Rovnice a nerovnice v součinném tvaru

Def.: Rovnicí v součinném tvaru s neznámou $x \in \mathbf{R}$ nazveme každou výrokovou formu tvaru $a(x) \cdot b(x) = 0$, kde $a(x)$, $b(x)$ jsou výrazy s proměnou $x \in \mathbf{R}$.

Pozn.: Řešení rovnice v součinném tvaru se opírá o větu:
 $\forall x, y \in \mathbf{R} : xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

V.2.1.: Necht' P_1 je množina kořenů rovnice $a(x) = 0$ a P_2 je množina kořenů rovnice $b(x) = 0$. Označme P množinu kořenů rovnice $a(x) \cdot b(x) = 0$. Pak $P = P_1 \cup P_2$.

[Dk.: a) $P \subseteq P_1 \cup P_2$: Necht' $c \in P \Rightarrow a(c) \cdot b(c) = 0 \Rightarrow a(c) = 0 \vee b(c) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c \in P_1 \vee c \in P_2 \Rightarrow c \in P_1 \cup P_2$$

b) $P_1 \cup P_2 \subseteq P$: Necht' $c \in P_1 \cup P_2 \Rightarrow c \in P_1 \vee c \in P_2 \Rightarrow a(c) = 0 \vee b(c) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a(c) \cdot b(c) = 0 \Rightarrow c \in P$]

Def.: Nerovnicí v součinném tvaru s neznámou $x \in \mathbf{R}$ nazýváme každou výrokovou formu tvaru $a(x) \cdot b(x) < 0, a(x) \cdot b(x) > 0, a(x) \cdot b(x) \leq 0, a(x) \cdot b(x) \geq 0$, kde $a(x), b(x)$ jsou výrazy s proměnnou $x \in \mathbf{R}$.

Pozn.: Řešení nerovnice v součinném tvaru se opírá o platnost těchto vět:

Pro $\forall x, y \in \mathbf{R}$: a) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0, y > 0) \vee (x < 0, y < 0)$

b) $xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0, y \geq 0) \vee (x \leq 0, y \leq 0)$

c) $xy < 0 \Leftrightarrow (x > 0, y < 0) \vee (x < 0, y > 0)$

d) $xy \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0, y \leq 0) \vee (x \leq 0, y \geq 0)$

V.2.2.: Necht' P_1 je množina řešení nerovnice $a(x) > 0$, P_2 nerovnice $b(x) > 0$, P_3 nerovnice $a(x) < 0$, P_4 nerovnice $b(x) < 0$. Necht' P je množina všech řešení nerovnice $a(x) \cdot b(x) > 0$. Pak platí: $P = (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)$.

[Dk.: a) $P \subseteq (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)$: Necht' $c \in P \Rightarrow a(c) \cdot b(c) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [a(c) > 0 \wedge b(c) > 0] \vee [a(c) < 0 \wedge b(c) < 0] \Rightarrow (c \in P_1 \wedge c \in P_2) \vee$$

$$(c \in P_3 \wedge c \in P_4) \Rightarrow c \in (P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4)$$

b) $(P_1 \cap P_2) \cup (P_3 \cap P_4) \subseteq P$: analogicky]

Pozn.: Obdobně bychom mohli zavést rovnice a nerovnice v podílovém tvaru. Řeší se analogicky.

Def.: Výraz $V(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se nazývá lineární dvojčlen.

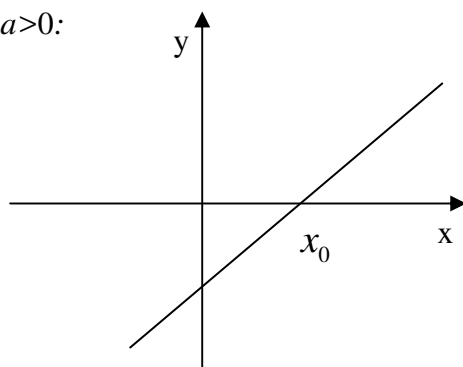
V.2.3.: Lineární dvojčlen $V(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ nabývá všech reálných hodnot, každé právě jednou.

$$[\text{Dk.: } y = ax + b, a \neq 0; y \in \mathbf{R} \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y - b}{a} \quad]$$

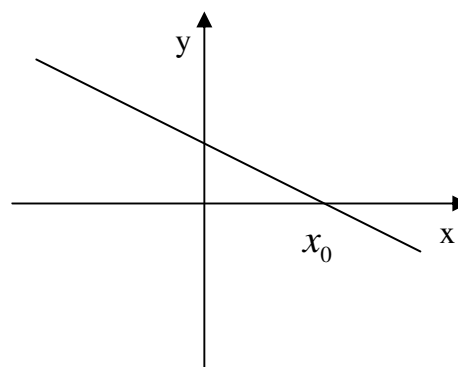
Pozn.: Představu o průběhu hodnot lineárního dvojčlenu poskytuje graf lineární funkce:

$$y = ax + b$$

$a > 0$:



$a < 0$:



$$y = 0 : 0 = ax_0 + b \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$$

V.2.4.: Necht' $ax + b$, $a \neq 0$ je lineární dvojčlen, $x_0 = -\frac{b}{a}$. Pak pro $\forall x \in \mathbf{R}$ platí:

$$\text{a) } a > 0 : (x < x_0 \Rightarrow ax + b < 0) \wedge (x > x_0 \Rightarrow ax + b > 0)$$

$$\text{b) } a < 0 : (x < x_0 \Rightarrow ax + b > 0) \wedge (x > x_0 \Rightarrow ax + b < 0)$$

$$[\text{Dk.: } \text{a) } a > 0 : x < x_0 \Rightarrow ax < ax_0 \Rightarrow ax + b < ax_0 + b = 0 \Rightarrow ax + b < 0$$

$$x > x_0 \Rightarrow ax > ax_0 \Rightarrow ax + b > ax_0 + b = 0 \Rightarrow ax + b > 0$$

$$\text{b) analogicky} \quad]$$

Pozn.: Předchozí větu lze stručně zformovat takto:

a) Je-li $a > 0$, pak v bodě $x_0 = -\frac{b}{a}$ přechází funkce $y = ax + b$ ze záporných hodnot do kladných.

b) Je-li $a < 0$, pak v bodě $x_0 = -\frac{b}{a}$ přechází funkce $y = ax + b$ z kladných hodnot do záporných.

Pozn.: Pomocí věty V.2.4. lze efektně řešit nerovnice v součinném a podílovém tvaru (především v případě, že se v nich vyskytuje větší počet lineárních dvojčlenů).

§3. Absolutní hodnota

Def.: Absolutní hodnotou nazýváme číslo $a \in \mathbf{R}$, zapisujeme $|a|$, pro které platí:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \ a > 0 \Rightarrow |a| = a \\ 2. \ a = 0 \Rightarrow |a| = 0 \\ 3. \ a < 0 \Rightarrow |a| = -a \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1) \ a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \\ 2) \ a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a \end{array}$$

Pozn.: Necht' $a \in \mathbf{R}$ je číslo, pak platí:

$$\begin{array}{l} 1. \ |a| \geq 0 \\ 2. \ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ 3. \ \sqrt{a^2} = |a| \end{array}$$

V.3.1.: Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, pak $|a - b|$ je vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

V.3.2.: Necht' a je nezáporné reálné číslo a $x \in \mathbf{R}$. Pak platí:

$$\begin{array}{l} 1. \ |x| < a \Leftrightarrow x \in (-a; a) \\ 2. \ |x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a; a] \\ 3. \ |x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty) \\ 4. \ |x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; \infty) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [\text{Dk.: } 1. \ |x| < a \text{ a) „} \Rightarrow \text{“: } \alpha) \ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x < a \Rightarrow x \in \langle 0; a \rangle \\ \qquad \qquad \qquad \beta) \ x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x < a \Rightarrow x > -a \Rightarrow x \in (-a; 0] \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow x \in (-a; a) \\ \text{b) „} \Leftarrow \text{“: } x \in (-a; a) \Rightarrow |x - 0| < a \Rightarrow |x| < a \\ \text{ostatní analogicky} \quad] \end{array}$$

A) Zjednodušování výrazů s absolutní hodnotou

V.3.3.: Necht' $a, b \in \mathbf{R}; a < b$.

Necht' $(a, b); \langle a, b \rangle$ je omezený otevřený (uzavřený) interval.

$$\text{Označme } s = \frac{a+b}{2}, k = \frac{b-a}{2}.$$

$$\text{Pak platí: } \begin{array}{l} 1) \ x \in (a, b) \Leftrightarrow |x - s| < k \\ 2) \ x \in \langle a, b \rangle \Leftrightarrow |x - s| \leq k \end{array}$$

$$[\text{Dk.: } s = \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2s = a + b$$

$$k = \frac{b-a}{2} \Rightarrow 2k = b - a$$

$$2s + 2k = 2b$$

$$b = s + k$$

$$2s - 2k = 2a$$

$$a = s - k$$

- 1) „ $\Leftrightarrow$ “: $x \in (a, b) \Leftrightarrow x \in (s - k, s + k) \Leftrightarrow s - k < x < s + k \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -k < x - s < k \Leftrightarrow |x - s| < k$
- 2) analogicky]

- Pozn.:** a) Číslo s z V.3.3. se nazývá střed intervalu $(a, b); \langle a, b \rangle$. Číslo $2k$ se nazývá délka intervalu.
- b) Intervaly $(a, b); \langle a, b \rangle$ mají společný střed a stejnou délku.
- c) Uvedeným způsobem lze charakterizovat pouze oboustranně otevřený nebo oboustranně uzavřený interval.
- d) Logickým důsledkem V.3.3. je: 1) $x \in (-\infty; a) \cup (b; \infty) \Leftrightarrow |x - s| > k$
 2) $x \in (-\infty; a] \cup [b; \infty) \Leftrightarrow |x - s| \geq k$

B) Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Př.:

§4. Úpravy kvadratických výrazů

Def.: Každý výraz $V(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R, a \neq 0; x \in R$ nazýváme kvadratickým trojčlenem.

Výraz ax^2 se nazývá kvadratický, bx lineární a c absolutní člen výrazu $V(x)$.

Je-li $a = 1$ nazýváme daný kvadratický trojčlen normovaný.

Pozn.: Je-li některý z koeficientů b, c roven nule, hovoříme o tzv. neúplném kvadratickém trojčlenu, případně o kvadratickém výrazu bez lineárního (absolutního) členu.

Pozn.: Upravme $(rx + s)(tx + u); r, s, t, u \in R; r \neq 0; t \neq 0 \Rightarrow$

$$(rx + s)(tx + u) = \underbrace{rt}_{a}x^2 + \underbrace{(st + ru)}_bx + \underbrace{su}_c = ax^2 + bx + c$$

Součinem dvou lineárních dvojčlenů dostaneme kvadratický trojčlen a naopak kvadratický trojčlen lze rozložit na součin dvou lineárních dvojčlenů (ne vždy v R).

A) Rozklad neúplných kvadratických trojčlenů

a) bez absolutního členu: $c = 0: ax^2 + bx = x(ax + b)$

b) bez lineárního členu: $b = 0: ax^2 + c = a(x^2 + \frac{c}{a}) = a \cdot \left(x^2 - \sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2} \right) =$

$$= a \left(x - \sqrt{-\frac{c}{a}} \right) \left(x + \sqrt{-\frac{c}{a}} \right) \text{ trojčlen bez lineárního členu lze rozložit v } R \text{ jen tehdy,}$$

když $ac < 0$.

B) Rozklad úplných kvadratických trojčlenů

Provádí se metodou „doplnění na úplný čtverec“.

Pozn.: Úpravy trojčlenů užíváme v těchto případech:

- a) při úpravě výrazů
- b) při řešení kvadratických rovnic a nerovnic
- c) při hledání nejmenší a největší hodnoty výrazu

§5. Kvadratické rovnice

Def.: Kvadratickou rovnicí s neznámou $x \in \mathbf{R}$ nazýváme každou rovnici tvaru $ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$. Čísla a, b, c jsou koeficienty kvadratické rovnice.

Pozn.: Při řešení rovnice $y^2 = k$; $k, y \in \mathbf{R}$ s neznámou y rozlišíme tyto případy:

- a) $k < 0 \Rightarrow P = \emptyset$
- b) $k = 0 \Rightarrow P = \{0\}$
- c) $k > 0 \Rightarrow P = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$

Při řešení kvadratické rovnice lze postupovat shodně, hledáme vhodný dvojčlen s proměnnou x , který označíme y a získáme rovnici $y^2 = k$.

Obecné odvození $ax^2 + bx + c = 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] = 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

$$a \left(x + \underbrace{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{-x_1} \right) \left(x + \underbrace{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{-x_2} \right) = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \right\} x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vztah pro kořeny kvadratické rovnice.

Def.: Necht' $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ je kvadratická rovnice. Pak $b^2 - 4ac = D$ se nazývá diskriminant kvadratické rovnice.

V.5.1.: Necht' $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ je kvadratická rovnice, $D = b^2 - 4ac$ její diskriminant, pak platí:

$$\text{a) } D > 0 \Rightarrow P = \left\{ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right\}$$

$$\text{b) } D = 0 \Rightarrow P = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

$$\text{c) } D < 0 \Rightarrow \text{nemá řešení v } \mathbf{R}$$

Pozn.: Při zápisu kořenů kvadratické rovnice dodržujeme následující pravidla:

a) Racionální kořeny krátíme (zapíšeme v základním tvaru).

b) Iracionální kořeny zapisujeme ve tvaru $p + q\sqrt{n}; p, q \in \mathbf{Q}; n \in \mathbf{N}$.

Pokud lze z odmocniny něco vytknout, uděláme to ($\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$).

§6. Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Pozn.: Z předchozích úvah plyne, že každá kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ ($\diamond$) má v $\mathbf{R}$ nejvýše 2 kořeny.

Obměna: Jestliže má ($\diamond$) alespoň 3 kořeny, pak $a=0$.

Hledejme podmínky pro koeficienty b, c v rovnici $bx + c = 0$, tak aby měla alespoň 3 různé kořeny v $\mathbf{R}$. Jde o lineární rovnici, jestliže platí $b = 0 \wedge c = 0 \Rightarrow P = \mathbf{R}$, platí tedy následující věta:

V.6.1.: Pro každou (kvadratickou) rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ platí: $P = \mathbf{R} \Leftrightarrow a = b = c = 0$

V.6.2: Pro každé 2 kvadratické trojčleny $a_1x^2 + b_1x + c_1; a_2x^2 + b_2x + c_2$ platí:

$$\forall x \in \mathbf{R}: a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge c_1 = c_2$$

[Dk.: „ $\Leftarrow$ “: zřejmé

$$\begin{aligned} \text{„}\Rightarrow\text{“: } a_1x^2 + b_1x + c_1 &= a_2x^2 + b_2x + c_2 \Rightarrow (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + \\ &+ (c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \wedge b_1 - b_2 = 0 \wedge c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow \\ &a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge c_1 = c_2 \quad] \end{aligned}$$

Def.: Je-li x_1 kořenem kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$, nazýváme dvojčlen $x - x_1$ kořenovým činitelem.

Zápis $a(x - x_1)(x - x_2)$ nazýváme rozkladem trojčlenu $ax^2 + bx + c$ na součin kořenových činitelů.

Pozn.: Je-li $x_1 = x_2$, pak platí $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ a mluvíme o tzv. dvojnásobném kořenu (pokud $D=0$).

V.6.3: Rovnice $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$ má v $\mathbf{R}$ dva reálné kořeny právě tehdy, když kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ lze rozložit na součin kořenových činitelů $a(x - x_1)(x - x_2)$.

V.6.4: Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice neboli Viětovy vztahy (Newton-Viětovy vztahy): Necht' x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0. \text{ Pak platí: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned} [\text{Dk.: Necht' } x_1, x_2 \text{ jsou kořeny: } ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) = \\ &= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x^1: b = -a(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x^0: c = ax_1x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad]$$

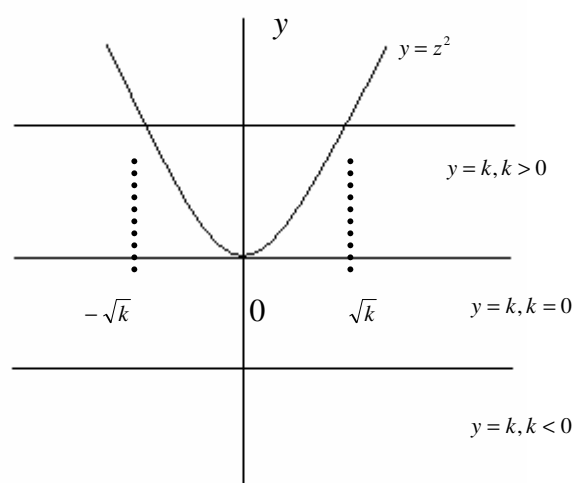
§7. Kvadratické nerovnice

Def.: Kvadratickou nerovnicí s neznámou $x \in \mathbf{R}$ nazýváme každou nerovnici, kterou lze převést do tvaru $ax^2 + bx + c < 0$ ($>$; $\leq$; $\geq$); $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

Řešit kvadratickou nerovnici znamená stanovit její obor pravdivosti P v $\mathbf{R}$, a to výčtem prvků nebo pomocí intervalů a množinových operací s nimi.

Pozn.: Klasifikace řešení kvadratické nerovnice bez lineárního členu:

	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$z^2 < k$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(-\sqrt{k}; \sqrt{k})$
$z^2 \leq k$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\langle -\sqrt{k}; \sqrt{k} \rangle$
$z^2 > k$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R} - \{0\}$	$(-\infty; -\sqrt{k}) \cup (\sqrt{k}; \infty)$
$z^2 \geq k$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$(-\infty; -\sqrt{k}) \cup \langle \sqrt{k}; \infty \rangle$



Pozn.: I při řešení kvadratické nerovnice s lineárním členem lze předchozí tabulky použít, doplníme-li kvadratický trojčlen na úplný čtverec:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Po substituci $z = x + \frac{b}{2a}$ přejdeme na výše uvedený tvar.

§8. Důsledkové úpravy rovnic

Def.: Přejít od rovnice $L_1(x) = P_1(x)$ s oborem pravdivosti P_1 k rovnici $L_2(x) = P_2(x)$ s oborem pravdivosti P_2 a se společným definičním oborem D , založený na platnosti věty: $\forall x \in D : L_1(x) = P_1(x) \Rightarrow L_2(x) = P_2(x)$ nazýváme důsledkovou úpravou rovnice $L_1(x) = P_1(x)$.

Pozn.: Pro P_1, P_2 zřejmě platí: $P_1 \subseteq P_2$, tzn. důsledkovou úpravou rovnice lze získat rovnici, jejíž obor pravdivosti je „větší“ než u původní rovnice.

V.8.1.: Přehled důsledkových úprav rovnice $L(x) = P(x), x \in R$:

Nechť D je definiční obor, pak $\forall x \in D$ platí:

- 1) $L(x) = P(x) \Rightarrow P(x) = L(x)$ záměna stran rovnice
- 2) $G(x) = L(x) \wedge G(x) = P(x) \Rightarrow L(x) = P(x)$ „jakási substituce“
- 3) $L(x) = P(x) \Rightarrow L(x) + C(x) = P(x) + C(x)$ přičtení k oběma stranám rovnice stejného výrazu definovaného v D
- 4) $L(x) = P(x) \Rightarrow L(x) \cdot C(x) = P(x) \cdot C(x)$ násobení obou stran rovnice výrazem definovaným v D
- 5) $L(x) = P(x) \Rightarrow L^n(x) = P^n(x), n \in N$ umocnění obou stran rovnice
- 6) $L(x) = P(x) \Rightarrow \sqrt[n]{L(x)} = \sqrt[n]{P(x)}, n \in N; L(x) \geq 0; P(x) \geq 0$ odmocnění obou nezáporných stran rovnice

Def.: Ekvivalentní úpravou dané rovnice nazýváme její důsledkovou úpravu, při níž získáme rovnici s týmž oborem pravdivosti, jako měla rovnice původní. Dané dvě rovnice nazýváme ekvivalentní.

Pozn.: a) Je zřejmé, že ve V.8.1. nelze všechny implikace obrátit (proto ne všechny úpravy jsou ekvivalentní).

b) Při řešení rovnice důsledkovými úpravami rozlišujeme dvě fáze:

1. rozbor (řešení) – užitím V.8.1 stanovíme $P_2 : P_2 \supseteq P_1$
2. zkouška – určíme, které prvky P_2 patří do P_1

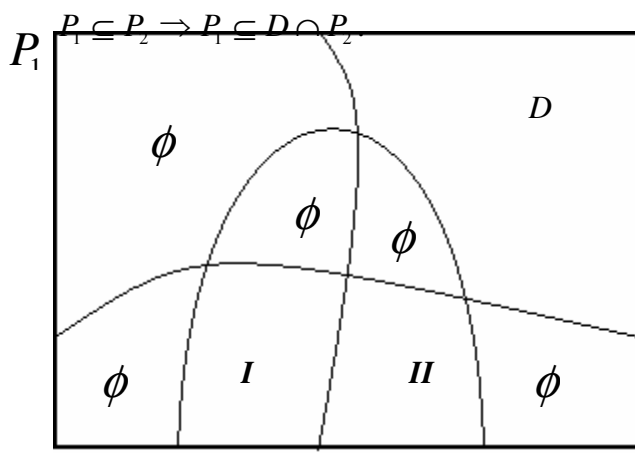
Pozn.: Množinová podstata rozboru a zkoušky:

Při řešení rovnice v R důsledkovými úpravami vyjadřujeme obor pravdivosti P_1 pomocí jiné množiny P_2 :

a) Neurčíme-li def. obor D dané rovnice, rozбором (řešením) zjistíme, že $P_1 \subseteq P_2$.

Pro zakreslení prvků P_2 jsou k dispozici 2 pole: $P_1 \cap P_2, P_1' \cap P_2$. Teprve zkouškou rozhodneme, do kterého pole prvky P_2 patří.

b) Určíme-li def. obor D dané rovnice, víme, že $P_1 \subseteq D$. Z rozboru plyne, že



R
znovu zbývají 2 pole:
 $I - P_1 \cap P_2 \cap D$,
 $II - P_1 \cap P_2 \cap D$ pro zakreslení
prvků $D \cap P_2$. Teprve zkouškou
rozhodneme, do kterého pole
který prvek patří.

Pozn.: Důsledkové úpravy rovnic lze užít i při řešení rovnic s absolutní hodnotou.

§9. Rovnice a nerovnice s parametrem

Def.: Rovnici (nerovnici) se dvěma proměnnými $x, p \in R$ nazýváme parametrickou rovnicí (nerovnicí) s neznámou x a s parametrem p , považujeme-li ji jako zápis všech rovnic (nerovnic), které získáme dosazováním konstanty za parametr p .

Řešit rovnici (nerovnici) s parametrem znamená určit množinu všech řešení v závislosti na parametru, přičemž zpravidla řešíme tuto rovnici (nerovnici) pro všechny přípustné hodnoty parametru.

Pozn.: Analogicky definujeme rovnici (nerovnici) s více parametry.

A) Lineární rovnice s parametrem

Př.:

B) Kvadratické rovnice s parametrem

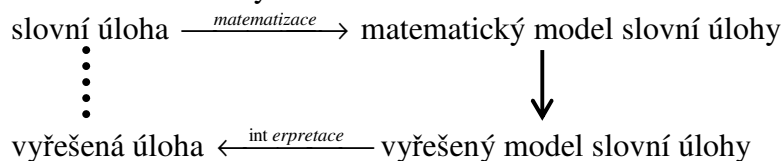
Př.:

C) Nerovnice s parametrem

Př.:

§10. Slovní úlohy

Pozn.: Schéma řešení slovní úlohy:



Př.: